



5.5 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ C

Εισαγωγή

Η επίλυση των εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού, η "αναγκαστική" επαφή με τους μιγαδικούς αριθμούς για την έκφραση των πραγματικών ριζών και η εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού δημιούργησαν στις αρχές του 17ου αιώνα τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη μιας γενικής θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων στην Άλγεβρα. Βασικά στοιχεία αυτής της θεωρίας δεν ήταν μόνο οι μέθοδοι επίλυσης, αλλά και δομικά ζητήματα, όπως οι σχέσεις ριζών και συντελεστών μιας εξίσωσης, καθώς και η σχέση ανάμεσα στο βαθμό και στο πλήθος των ριζών. Το τελευταίο, που καθιερώθηκε αργότερα ως **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**

"κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών n ακριβώς ρίζες",

διατυπώνεται στην αρχή διστακτικά, καθώς οι μιγαδικοί δε θεωρούνται ακόμη ισότιμοι προς τους υπόλοιπους αριθμούς. Ο R. Descartes, στο βιβλίο III της "La Géométrie" (1637) γράφει ότι: "κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες διαφορετικές ρίζες όσες και οι διαστάσεις [δηλ. ο βαθμός] της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση", αλλά ονομάζει τις θετικές ρίζες "αληθινές", τις αρνητικές "ψεύτικες" και εισάγει για πρώτη φορά τον όρο "φανταστικές" για τις υπόλοιπες:

"...ενώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ έχει τρεις ρίζες, εν τούτοις υπάρχει μία μόνο πραγματική ρίζα, το 2, ενώ οι άλλες δύο παραμένουν φανταστικές".

Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας άρχισε να αποκτά εξαιρετική σημασία με την ανάπτυξη της Ανάλυσης, καθώς η παραγοντοποίηση των πολυωνύμων έπαιζε πρωταρχικό ρόλο στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων (διάσπαση ρητών κλασμάτων σε απλά κλάσματα). Ο G.W. Leibniz έθεσε το 1702 αυτό το ζήτημα ισχυριζόμενος (λαθεμένα) ότι το πολυώνυμο $x^4 + a^4$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Το γεγονός αυτό οδήγησε στις πρώτες συστηματικές προσπάθειες να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού, που αποτελεί μια άλλη ισοδύναμη μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος. Ύστερα από ορισμένες ημιτελείς προσπάθειες των d'Alembert (1746), L. Euler (1749) και J.L. Lagrange (1772), ο C.F. Gauss έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη το 1799 (σε ηλικία 22 χρονών), στη

στη διδακτορική του διατριβή που είχε τίτλο: "Νέα απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε ακέραια ρητή συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού".

Η Εξίσωση $z^n=1$

Γνωρίζουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $z^n=1$ έχει μια λύση, την $z=1$, αν ο n είναι περιττός και δύο λύσεις, τις $z_1=1$ και $z_2=-1$, αν ο n είναι άρτιος.

Ας λύσουμε τώρα στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών μερικές εξισώσεις της μορφής $z^n=1$, όπου n θετικός ακεραίος. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad z^3=1 &\Leftrightarrow z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \\ &\Leftrightarrow z-1=0 \text{ ή } z^2+z+1=0 \\ &\Leftrightarrow z=1 \text{ ή } z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ή } z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow z=1 \text{ ή } z=-1 \text{ ή } z=i \text{ ή } z=-i,$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο σύνολο \mathbb{C} τέσσερις λύσεις.

Γενικά ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^v=1$, όπου v θετικός ακέραιος, έχει v ακριβώς διαφορετικές λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{v} + i \sin \frac{2k\pi}{v}, \quad k=0,1,2,3,\dots,v-1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ μια λύση σε τριγωνομετρική μορφή της εξίσωσης $z^v=1$.

Τότε,

$$\begin{aligned} [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^v &= 1, \\ r^v (\cos(v\theta) + i \sin(v\theta)) &= \cos 0 + i \sin 0 \end{aligned}$$

Άρα, $r^v=1$ και $v\theta-0=2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $r=1$ και $\theta = \frac{2k\pi}{v}$, $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^v=1$, θα είναι της μορφής

$$\cos \frac{2k\pi}{v} + i \sin \frac{2k\pi}{v}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε μιγαδικός της μορφής $z_k = \cos \frac{2k\pi}{v} + i \sin \frac{2k\pi}{v}$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $z^v=1$, αφού

$$z_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{v} + i \sin \frac{2k\pi}{v} \right) = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης $z^v=1$ είναι οι αριθμοί

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{v} + i \sin \frac{2k\pi}{v}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Για $k=0$ έχουμε την προφανή λύση της εξίσωσης $z_0=1$, την οποία βρίσκουμε

$$\text{και για } k=v, \text{ αφού } z_v = \cos \frac{2v\pi}{v} + i \sin \frac{2v\pi}{v} = 1.$$

Αν θέσουμε $z_1 = \cos \left(\frac{2\pi}{v} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{v} \right) = \omega$, τότε για τις ρίζες της $z^v=1$, θα ισχύει η σχέση

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{v} + i \sin \frac{2k\pi}{v} = \left(\cos \frac{2\pi}{v} + i \sin \frac{2\pi}{v} \right)^k = \omega^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \quad z_1 = \omega, \quad z_2 = \omega^2, \quad z_3 = \omega^3, \dots, z_{v-1} = \omega^{v-1} \\ z_v &= \omega^v = 1, \quad z_{v+1} = \omega^{v+1} = \omega^v \cdot \omega = \omega \quad \text{κτλ.} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι λύσεις της $z^v=1$ που δίνονται από την (1) δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του k έχουμε διαφορετικές λύσεις. Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν ακέραιοι ρ και v , τέτοιοι, ώστε να είναι $k = \rho v + v$ με $0 \leq v < v$, θα έχουμε:



Θα δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις $1 = \omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έστω ότι δε συμβαίνει αυτό. Τότε θα υπάρχουν φυσικοί λ_1, λ_2 με $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < v$, τέτοιοι, ώστε $\omega^{\lambda_1} = \omega^{\lambda_2}$, οπότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\lambda_1\pi}{v} + i \sin \frac{2\lambda_1\pi}{v} &= \cos \frac{2\lambda_2\pi}{v} + i \sin \frac{2\lambda_2\pi}{v} \\ \frac{2\lambda_1\pi}{v} - \frac{2\lambda_2\pi}{v} &= \mu \cdot 2\pi, \quad \mu \in \mathbb{Z} \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= v\mu, \quad \mu \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ακέραιος v διαιρεί τη διαφορά $\lambda_1 - \lambda_2$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $0 < \lambda_2 - \lambda_1 < v$.

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^v = 1$ είναι οι v διαφορετικοί αριθμοί

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}, \quad \text{όπου} \quad \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{v}\right).$$

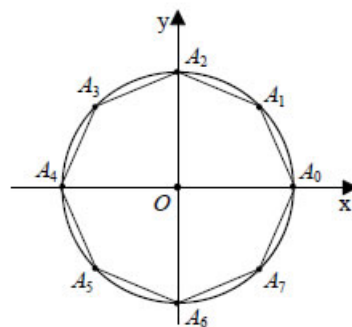
Οι λύσεις αυτές λέγονται και **νιοστές ρίζες της μονάδας**.

Οι εικόνες $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{v-1}$ των αντίστοιχων λύσεων $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}$ της εξίσωσης $z^v = 1$ είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με v πλευρές εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $r=1$. Πιο συγκεκριμένα:

- Η κορυφή A_0 παριστάνει τη λύση 1.

- Η επόμενη κορυφή A_1 παριστάνει τη λύση $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{v}\right)$.

- Η κορυφή A_2 παριστάνει την ω^2 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\vec{OA_1}$ κατά γωνία $\frac{2\pi}{v}$.



-

Η κορυφή A_3 παριστάνει την ω^3 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\vec{OA_1}$ κατά γωνία $\frac{2 \cdot 2\pi}{v}$ κτλ.

Η Εξίσωση $z^v = a, a \neq 0$

Έστω $a = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ μια τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού a . Τότε από τον τύπο του de Moivre έχουμε:

$$a = \left(\sqrt[v]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{v} + i \sin \frac{\theta}{v} \right) \right)^v.$$

Αν θέσουμε $z_0 = \sqrt[v]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{v} + i \sin \frac{\theta}{v} \right)$ τότε η εξίσωση $z^v = a$ γράφεται $z^v = z_0^v$

ή ισοδύναμα $\left(\frac{z}{z_0} \right)^v = 1$

Επομένως, το $\frac{z}{z_0}$ μπορεί να πάρει τις v διαφορετικές τιμές

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{v-1}, \quad \text{όπου} \quad \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{v}\right),$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης $z^v = a$ είναι οι αριθμοί



Αποδειξαμε λοιπον οτι:

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^n = a$, όπου n θετικός ακέραιος και $a = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)$, $\rho > 0$, έχει n διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\sin \frac{2k\pi + \theta}{n} + i\eta\mu \frac{2k\pi + \theta}{n} \right), \quad k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με n πλευρές εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[n]{\rho}$, όπου $\rho = |a|$.

Έστω για παράδειγμα η εξίσωση

$$z^5 = 16(\sqrt{3} + i)$$

Επειδή $16(\sqrt{3} + i) = 32 \left(\sin \frac{\pi}{6} + i\eta\mu \frac{\pi}{6} \right)$, οι λύσεις z_k της εξίσωσης (1) δίνονται

από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[5]{32} \left(\sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{5} + i\eta\mu \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{5} \right) = 2 \left(\sin \frac{12k\pi + \pi}{30} + i\eta\mu \frac{12k\pi + \pi}{30} \right), \quad k=0, 1, 2, 3, 4.$$

Πιο συγκεκριμένα οι λύσεις είναι:

$$z_0 = 2 \left(\sin \frac{\pi}{30} + i\eta\mu \frac{\pi}{30} \right),$$

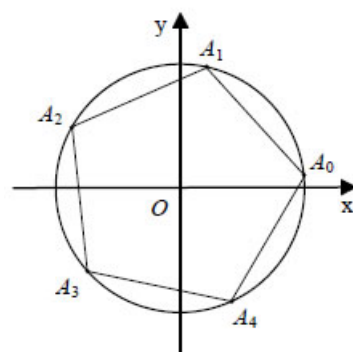
$$z_2 = 2 \left(\sin \frac{25\pi}{30} + i\eta\mu \frac{25\pi}{30} \right),$$

$$z_4 = 2 \left(\sin \frac{49\pi}{30} + i\eta\mu \frac{49\pi}{30} \right).$$

$$z_1 = 2 \left(\sin \frac{13\pi}{30} + i\eta\mu \frac{13\pi}{30} \right),$$

$$z_3 = 2 \left(\sin \frac{37\pi}{30} + i\eta\mu \frac{37\pi}{30} \right),$$

Οι λύσεις αυτές είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\rho=2$



Πολυωνυμικές Εξισώσεις με Πραγματικούς Συντελεστές

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z)$, νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n \neq 0,$$

έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών n ακριβώς ρίζες.

Αν z_1, z_2, \dots, z_n είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ (οι οποίες δεν είναι κατανάγκη διαφορετικές), τότε αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο αναλύεται σε

γινόμενο παραγόντων ως εξής:



πραγματικές, είναι μιγαδικές συζυγείς. Ας λύσουμε τώρα μία ανωτέρου βαθμού, για παράδειγμα $z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0$, που είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού. Έχουμε:

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 3)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 = 0 \text{ ή } z - 1 = 0.$$

Όμως,

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{2}i \text{ ή } z = 1 - \sqrt{2}i.$$

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης είναι $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$, και 1. Και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης είναι συζυγείς. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται για οποιαδήποτε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = \alpha + \beta i$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}_0 = \alpha - \beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μια πολυωνυμική εξίσωση, όπως γνωρίζουμε, έχει τη μορφή:

$$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \text{ όπου } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha_n \neq 0.$$

Αφού ο αριθμός z_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης, έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} \alpha_n z_0^n + \alpha_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0 &= 0 \\ \overline{\alpha_n z_0^n + \alpha_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0} &= \overline{0} \\ \overline{\alpha_n z_0^n} + \overline{\alpha_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{\alpha_1 z_0} + \overline{\alpha_0} &= 0 \\ \overline{\alpha_n} \bar{z}_0^n + \overline{\alpha_{n-1}} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \overline{\alpha_1} \bar{z}_0 + \overline{\alpha_0} &= 0 \\ \alpha_n \bar{z}_0^n + \alpha_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 \bar{z}_0 + \alpha_0 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, ο \bar{z}_0 είναι και αυτός ρίζα της εξίσωσης.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{v}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{v}\right)$ να αποδειχτεί ότι:

α) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{v-1} = 0$ β) $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \cdot \dots \cdot \omega^{v-1} = (-1)^{v-1}.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$\begin{aligned}
 &= \left(\cos \nu \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \nu \frac{2\pi}{\nu} \right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \\
 &= \cos \nu \frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu} + i \sin \nu \frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu} \\
 &= \cos \nu(\nu-1)\pi + i \sin \nu(\nu-1)\pi \\
 &= (\cos \nu\pi + i \sin \nu\pi)^{\nu-1} \\
 &= (-1)^{\nu-1}
 \end{aligned}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2\cos\theta \cdot x + 1 = 0$. Αν x_1, x_2 , είναι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις x_1^ν, x_2^ν .

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta \leq 0$.

Επομένως, $x_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$.

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η

$$x^2 - (x_1^\nu + x_2^\nu)x + x_1^\nu \cdot x_2^\nu = 0.$$

Έχουμε

$$x_1^\nu = (\cos\theta + i\sin\theta)^\nu = \cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)$$

και

$$\begin{aligned}
 x_2^\nu &= (\cos\theta - i\sin\theta)^\nu = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^\nu = \cos(-\nu\theta) + i\sin(-\nu\theta) \\
 &= \cos(\nu\theta) - i\sin(\nu\theta).
 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$x_1^\nu + x_2^\nu = \cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta) + \cos(\nu\theta) - i\sin(\nu\theta) = 2\cos(\nu\theta)$$

και

$$x_1^\nu \cdot x_2^\nu = (\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta))(\cos(\nu\theta) - i\sin(\nu\theta)) = \cos^2\nu\theta + \sin^2\nu\theta = 1$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 2\cos(\nu\theta)x + 1 = 0.$$

3. Να αναλυθεί σε γινόμενο πολωνόμων το πολώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$, αν γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $1 + \sqrt{2}i$.

ΛΥΣΗ

Αφού το $P(x)$ έχει ρίζα τον $x_0 = 1 + \sqrt{2}i$, θα έχει ρίζα και το συζυγή του $\bar{x}_0 = 1 - \sqrt{2}i$. Επομένως, το πολώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το γινόμενο $Q(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0)$, για το οποίο έχουμε

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= [x - (1 + \sqrt{2}i)][x - (1 - \sqrt{2}i)] = [(x - 1) - \sqrt{2}i][(x - 1) + \sqrt{2}i] \\
 &= (x - 1)^2 - (\sqrt{2}i)^2 \\
 &= x^2 + 1 - 2x + 2 \\
 &= x^2 - 2x + 3.
 \end{aligned}$$



Γενικά, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή: κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες (αν υπάρχουν) έχουν αρνητική διακρίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A' ΟΜΑΔΑ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:

α) $z^3=1$ β) $z^4=1$ γ) $z^6=1$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3=-i$ β) $z^4=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ γ) $z^5=243\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3=\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ β) $z^4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ γ) $z^6=-64$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3+3z^2+4z=8$ β) $z^4+5z^2+4=0$

5. Αν ο μιγαδικός $2+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $3x^3-10x^2+7x+10=0$, να βρείτε και τις άλλες ρίζες της.

6. Αν w είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας, με $w \neq 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1-w+w^2)(1+w-w^2)$

7. Να λύσετε την εξίσωση $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=0$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $z^3+3z^2+3z+9=0$ και να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

B' ΟΜΑΔΑ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3=1-i$ β) $(z-1)^3-(1-i)(z+1)^3=0$.

2. Να λύσετε την εξίσωση $z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$



4. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $(z^2+1)^2+z^3+z=0$ και $z^{16}+2z^{14}+1=0$.
5. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , για τους οποίους ισχύει $z^7 \bar{z}^3 = 1$.
6. Αν η εξίσωση $(1+iz)^v = p(1-iz)^v$, $v \in \mathbf{N}^*$ έχει πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι $|p|=1$.
7. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+4=0$ με ρίζες τις x_1 και x_2 .
- α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων x_1+x_2 , x_1x_2 και $x_1^2+x_2^2$.
- β) Αν η εξίσωση $x^2+px+q=0$ έχει ως ρίζες τις x_1^2 και x_2^2 , να βρείτε τις τιμές των p και q .
8. α) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^2\theta \cdot z - 2\sin\theta \cdot z + (5-4\sin^2\theta) = 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- β) Να αποδείξετε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης κινούνται σε μια υπερβολή.
9. Να λύσετε την εξίσωση $x^9 - x^5 + x^4 - 1 = 0$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με $z \in \mathbf{C}$ και $\operatorname{Re}(z) \neq 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$.
- β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x,y)$, για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha x + \beta y i$ με $\alpha, \beta, x, y \in \mathbf{R}$ και $\alpha\beta \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ (α, β σταθερά).
2. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1 , για τους οποίους ισχύουν: $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο \mathbf{R}^* και ισχύει $w = \bar{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.
3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \lambda + 2 + (3\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z



4. Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών z τους οποίους ισχύει: α) $|2z+1| < |z+i|$ β) $|z-1|=1+\operatorname{Re}(z)$.
5. Να αποδείξετε ότι αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, \dots, z_k έχουν τις εικόνες τους στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, τότε ισχύει $z_1 + z_2 + \dots + z_k \neq 0$.
6. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $(1-z)^v = z^v$ είναι σημεία της ευθείας $x = \frac{1}{2}$.
7. Αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με πραγματικούς συντελεστές και $a \neq 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι:
 - α) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ ισχύει $(a\kappa^2 + b\kappa + \gamma)(a\lambda^2 + b\lambda + \gamma) > 0$.
 - β) Για οποιουδήποτε συζυγείς μιγαδικούς z_1 και z_2 διαφορετικούς από τις ρίζες του τριωνύμου ισχύει επίσης $(az_1^2 + bz_1 + \gamma)(az_2^2 + bz_2 + \gamma) > 0$.
8. Γνωρίζοντας ότι για τις νιοστές ρίζες της μονάδας $1, z_1, z_2, \dots, z_k$ ισχύει $1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{v-1} = 0$, να αποδείξετε τις ταυτότητες:
 - α) $\eta\mu \frac{2\pi}{v} + \eta\mu \frac{4\pi}{v} + \eta\mu \frac{6\pi}{v} + \dots + \eta\mu \frac{2(v-1)\pi}{v} = 0$,
 - β) $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{v} + \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{v} + \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{v} + \dots + \sigma\upsilon\nu \frac{2(v-1)\pi}{v} = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:
 - (i) Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $u^2 + v^2 = 0$, τότε :

Α. $u=0$	Β. $v=0$
Γ. $u=v=0$	Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.
 - (ii) Ο αριθμός $z = (3+5i)^{10} + (3-5i)^{10}$ είναι:

Α. Φανταστικός	Β. Μηδέν
Γ. Πραγματικός	Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.
2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z :

Α. $ z^2 = z ^2$	Β. $z \cdot \bar{z} = z ^2$	Γ. $z \cdot \bar{z} = z^2$
Δ. $z \cdot \bar{z} = z $	Ε. $ z^2 = z ^2$	



$$|z - 1| = |z + 1|$$

$$|z - 1| = |z + 1|$$

$$|z - 1| = |z - i|$$

$$|z + 1| = |z + i|$$

$$yy'$$

$$y' = x$$

$$y' = -x$$

$$x'x$$

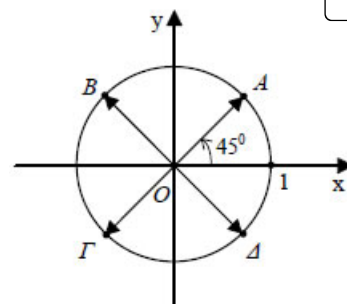
4. Να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό z της πρώτης στήλης στο όρισμά του της δεύτερης στήλης:

Μιγαδικός ($k > 0$)	Όρισμα
$k + ki$	-45°
$k - ki$	225°
	45°
$-k - ki$	180°
	60°
$-k + ki$	135°

5. Να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.
 Ο αριθμός των μιγαδικών ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης 5ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι:



A:
B:
Γ:
Δ:



7. Αν z είναι ο μιγαδικός που έχει ως εικόνα το A, να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό της πρώτης στήλης στην εικόνα του που αναφέρεται στη δεύτερη στήλη και σημειώνεται στο διπλανό σχήμα:

<u>Μιγαδικός</u>	<u>Εικόνα</u>
\bar{z}	B
$\frac{1}{2}z$	Δ
$\frac{1}{z}$	Θ
$-z$	Γ
$-\bar{z}$	E

